Números Quatérnions e Rotações no Espaço

Autor: Felipe Vaiano Calderan **Orientador:** Thiago Castilho de Mello

Uma breve introdução

No século XIX, percebeu-se uma interação importante entre a álgebra e geometria quando os números complexos foram mapeados como pontos no plano. Isso permitiu avanços importantes em diversas áreas, como na própria matemática, nas ciências da natureza e nas engenharias.
Como consequência desse sucesso, William Rowan Hamilton, em 1843, introduziu os **Números Quatérnions**, que desempenham papel semelhante aos complexos, mas no espaço. Não é surpresa que eles têm muitas aplicações, como na área da eletromecânica[1], educação física[2], e na computação[3].
Nesse pôster serão abordadas as rotações no plano e no espaço, então serão mostrados os quatérnions, suas propriedades, e como indexam rotações. O conteúdo teórico foi baseado em [1].

Rotações no Plano

Rotacionamos vetores no plano por **matrizes de rotação**:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}}_{v \text{ rotacionado}} = \underbrace{\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}}_{R_\theta \in SO(2)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{v \text{ original}}$$

Ou por produto de **números complexos**:

$$\underbrace{v_a' + v_b' i}_{v \text{ rotacionado}} = \underbrace{[cos(\theta) + isen(\theta)]}_{R_\theta \in U(1)} \cdot \underbrace{(v_a + v_b i)}_{v \text{ original}}$$

Note que temos o isomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \phi : \quad U(1) &\longrightarrow SO(2) \\ cos(\theta) + isen(\theta) &\longmapsto \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja, multiplicar $R_\theta \in U(1)$ por $v \in \mathbb{C}$ equivale, geometricamente, a rotacionar o vetor correspondente a v por um ângulo, que é o argumento de R_θ.

Rotações no Espaço

Para uma rotação no espaço, serão usadas as **três** matrizes ao lado. Cada uma corresponde a rotação em um dos **versores** do plano cartesiano. Note que todas pertencem ao $SO(3)$.

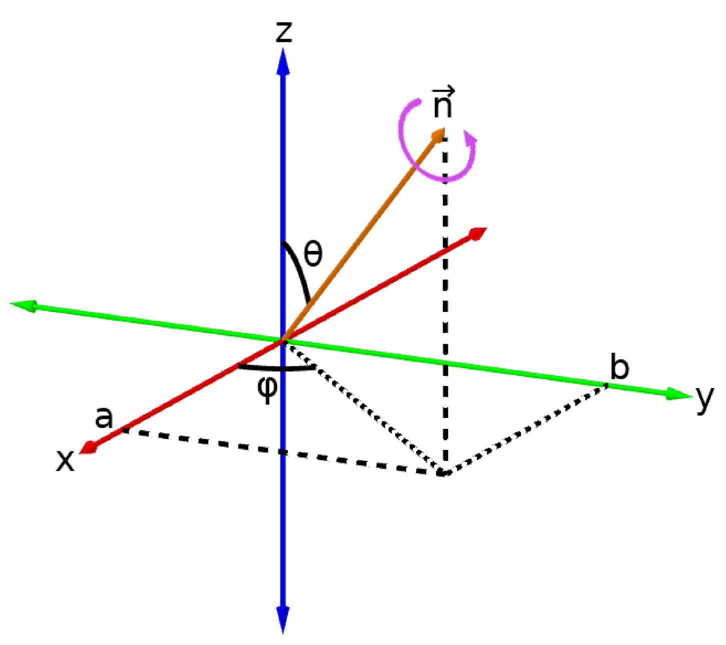
Matrizes de rotação:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sen(\theta) \\ 0 & sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como rotacionar algo em torno de um eixo $\vec{n}$?



Por coordenadas esféricas, temos que:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen(\theta)cos(\varphi) \\ sen(\theta)sen(\varphi) \\ cos(\theta) \end{bmatrix} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)(e_3)$$

Sabendo disso, ganhamos um modo de rotacionar em torno de $\vec{n}$:

1. Fazer o eixo de rotação $\vec{n}$ coincidir com o vetor e_3 desfazendo as rotações que determinam $\vec{n}$.
2. Rotacionar ao redor do eixo Oz pelo ângulo ψ.
3. Devolver $\vec{n}$ através das rotações que o determinam.

Em outras palavras, podemos descrever $R_{\vec{n},\psi}$ como:

$$R_{\vec{n},\psi} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta) \circ R_z(\psi) \circ R_y(-\theta) \circ R_z(-\varphi)$$

Com isso, concluímos que **todos** os elementos do conjunto $\mathcal{R}$ de rotações no espaço pertencem ao grupo $SO(3)$. Também é fácil de verificar que $\vec{n}$ é um **autovetor** de uma rotação, com **autovalor** 1.

Números Quatérnions

Definição

O conjunto dos Quatérnions ($\mathbb{H}$) é definido como:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

Ou seja, é um **espaço vetorial** cuja base é $\{1, i, j, k\}$, munido de um produto, e que satisfaz a regra acima, obedecendo a distributividade em relação à adição.

Essa regra torna $\mathbb{H}$ uma **álgebra não comutativa**, resumida por:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Pela tabela, podemos verificar que o centro da álgebra $\mathbb{H}$ é igual a $\mathbb{R}$, ou seja, elementos onde $b = c = d = 0$.

Propriedades

Sejam $p, q \in \mathbb{H}$, então:

Conjugado de q é:

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Propriedades:

1. $\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$
2. $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$
3. $\bar{\bar{q}} = q$

Norma de q é:

$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Propriedades:

1. $\|q\|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q$
2. $\|pq\|^2 = \|p\|^2\|q\|^2$
3. $q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}$

Os quatérnions unitários podem ser interpretados geometricamente como a esfera tridimensional em $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

.

Conjugação

O conjunto dos quatérnions **não nulos** ($\mathbb{H}^*$) forma um grupo com relação à multiplicação nos quatérnions.

Definimos a conjugação de $q \in \mathbb{H}^*$ como a aplicação:

$$\begin{aligned} Ad_q : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ r &\longmapsto qrq^{-1} \end{aligned}$$

Cada aplicação Ad_q é uma aplicação linear inversível em $\mathbb{H}$ e, portanto, um elemento de $GL(\mathbb{H})$ (grupo de matrizes inversíveis munido de multiplicação). Então:

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{H}^* &\longrightarrow GL(\mathbb{H}) \\ q &\longmapsto Ad_q \end{aligned}$$

Um $p \in \mathbb{H}$ é **puro** se sua parte real for igual a zero.

Proposição A:

A aplicação abaixo é injetiva.

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (x, y, z) &\longmapsto xi + yj + zk \end{aligned}$$

Proposição B:

Seja $q \in \mathbb{H}^*$ e w um quatérnion puro. $Ad_q(w)$ é puro.

Pelas proposições **A** e **B**, podemos correstringir a aplicação Ad.

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{H}^* &\longrightarrow GL(3, \mathbb{R}) \\ q &\longmapsto Ad_q \end{aligned}$$

Tendo definido as propriedades algébricas dos **números quatérnions** e a aplicação de **conjugação**, agora exploraremos como funcionam rotações espaciais através deles.

Rotações por Quatérnions

Finalmente, restringindo à $\mathbb{S}^3$ o domínio da última aplicação da coluna anterior, temos que o conjunto imagem corresponde exatamente ao $SO(3)$:

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{S}^3 &\longrightarrow GL(3, \mathbb{R}) \\ q &\longmapsto Ad_q \end{aligned}$$

Então Ad é um **homomorfismo de grupos** cuja imagem é $SO(3)$!

Mas o que exatamente deve ser feito para uma rotação ser realizada por quatérnions?

Lembremos de como rotacionávamos um objeto no espaço em torno de um eixo:

$$R_{\vec{n},\psi} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta) \circ R_z(\psi) \circ R_y(-\theta) \circ R_z(-\varphi)$$

Sendo Ad_q uma rotação espacial, basta codificarmos $\vec{n}$ e ψ nos quatérnions.

Tome $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{S}^3$. Sobre a transformação Ad_q temos:

O **eixo** n de rotação é:	O **ângulo** ψ de rotação é:
$n = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(bi + cj + dk)$	$\psi = cos^{-1}a$

Portanto, q pode ser reescrito como:

$$q = cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + sen\left(\frac{\psi}{2}\right) n$$

Assim, temos todo o arcabouço necessário para realizar uma rotação no espaço através de quatérnions, pois $R_{\vec{n},\psi} = Ad_q$.

Exemplo

Rotacione $v = (1, 0, 0)$ por $90°$ no eixo z:

Primeiramente, convertamos o vetor para formato de quatérnion: $v = 0 + 1i + 0j + 0k = i$

Agora, o eixo n em quatérnion: $n = 0 + 0i + 0j + 1k = k$

E então temos: $q = \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot k\right)\right]$

Finalmente:

$$v' = Ad_q(v) = qv\bar{q} =$$

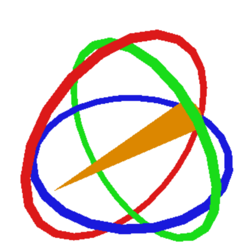
$$= \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot k\right] i \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot k\right] =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}i = j$$

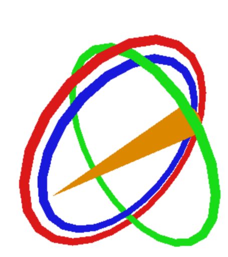
Portanto $v' = (0, 1, 0)$.

Aplicação

Softwares mais antigos lidam com rotações através de **gimbal**, que são anéis conectados. O anel mais externo move o central e o interno, o central move só o interno, e o interno só se move. Nesse modelo ocorre um fenômeno chamado **Gimbal Lock**, onde, se $y = 90°$, dois anéis ficam paralelos, perdendo um eixo de rotação.



Organização dos Gimbals



Gimbal Lock

Para resolver isso, o desenvolvedor pode optar por usar matriz de rotação ou quatérnions em vez de gimbal. Os quatérnions são mais vantajosos pois usam 5 variáveis a menos e realizam 27 operações a menos que matrizes quando rotações são conectadas.

Unity 5 é um exemplo de software para desenvolvimento de jogos que usa quatérnions para manipular rotações.

[1] E. Batista, M. V. Santos, *Rotações, quatérnions e álgebras de Clifford,* Notas de minicurso da VI bienal da sociedade brasileira de matemática, Campinas, 2012.

[2] Santiago, P., *Rotações Tridimensionais Em Biomecânica Via Quatérnions: Aplicação Na Análise Dos Movimentos Esportivos,* Universidade Estadual Paulista, 2009.

[3] R. Mukundan, *Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics, and Beyond,* Dpto. de computação da Universidade de Canterbury Christchurch, Nova Zelândia, 2002.