Números Quatérnions e Rotações no Espaço

Autor: Felipe Vaiano Calderan
Orientador: Thiago Castilho de Mello

Universidade Federal de São Paulo
V Congresso Acadêmico Unifesp

3 de junho de 2019

Rotações no Plano

Refrescando a memória...

Podemos rotacionar vetores no plano através da **Matriz de Rotação**:

$$Rm_\theta = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \in SO(2)$$

Ou pelos **Números Complexos Unitários** $(U(1))$:

$$Rc_\theta = cos(\theta) + isen(\theta) \in U(1)$$

O cálculo é executado da seguinte forma:

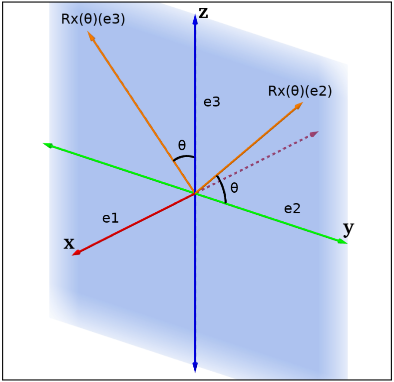
$$v' = R_\theta \cdot v$$

onde R_θ pode ser Rm_θ ou Rc_θ e v deve estar no formato apropriado.

Rotações no Espaço

Matrizes de Rotação

Enquanto no plano uma matriz já bastava para rotacionar um vetor de todas as maneiras, no espaço, inicialmente precisaremos de **três**.



$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sen(\theta) \\ 0 & sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

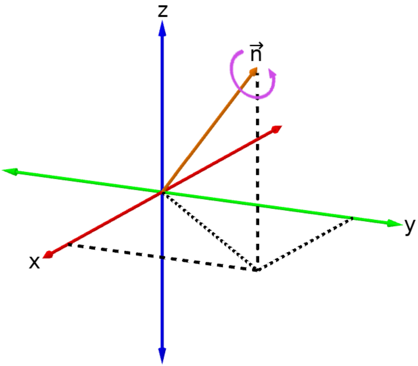
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vale a pena observar que as três matrizes pertencem ao $SO(3)$

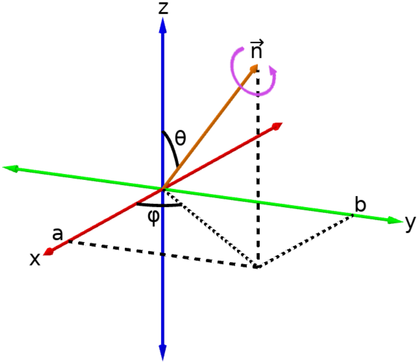
Eixo de Rotação

Como rotacionar algum objeto em torno de um eixo $\vec{n}$ específico?



Eixo de Rotação

Como rotacionar algum objeto em torno de um eixo $\overrightarrow{n}$ específico?



Podemos dizer que:

$$\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen(\theta)cos(\varphi) \\ sen(\theta)sen(\varphi) \\ cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Através de coordenadas esféricas.

Com isso, ainda ganhamos que:

$$\overrightarrow{n} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)(e_3)$$

Quatérnions

Definição

O conjunto dos **Quatérnions**, denotado por $\mathbb{H}$, é definido como:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \;\; i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

Ou seja, é um **espaço vetorial** cuja base é $\{1, i, j, k\}$, munido de um produto, e que satisfaz a regra acima, obedecendo a distributividade em relação à adição.

Essa regra torna $\mathbb{H}$ uma **álgebra não comutativa**, resumida por:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Note que os elementos que comutam com todos os outros são os reais, ou seja, elementos onde $b = c = d = 0$.

Propriedades

Seja $q \in \mathbb{H}$, então:

O **conjugado** de q é dado por:

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Propriedades:

1. $\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$
2. $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$
3. $\bar{\bar{q}} = q$

A **norma** de q é dada por:

$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Propriedades:

1. $\|q\|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q$
2. $\|pq\|^2 = \|p\|^2\|q\|^2$, $p \in \mathbb{H}$
3. $q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}$

Note que os quatérnions unitários podem ser interpretados geometricamente como a esfera tridimensional em $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Conjugação I

Definimos a conjugação por $q \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ como a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} Ad_q : & \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & r & \longmapsto & qrq^{-1} \end{array}$$

Ad_q é um **automorfismo** da álgebra dos quatérnions, ou seja, cada aplicação Ad_q é uma aplicação linear inversível em $\mathbb{H}$ e, portanto, um elemento de $GL(\mathbb{H})$

Agora, considere a aplicação abaixo:

$$\begin{array}{rccc} Ad : & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & GL(\mathbb{H}) \\ & q & \longmapsto & Ad_q \end{array}$$

Conjugação II

Proposição:

Seja $p \in \mathbb{H}$ um quatérnion puro (parte real nula), então $Ad_q(p)$ também é um quatérnion puro.

A partir disso, restringindo o domínio de Ad_q para quatérnions puros, podemos dizer que:

$$\begin{array}{rccc} Ad: & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & GL(3,\mathbb{R}) \\ & q & \longmapsto & Ad_q \end{array}$$

Pois o conjunto dos quatérnios puros é um espaço vetorial de dimensão 3 e, por isso, será identificado com $\mathbb{R}^3$.

Então Ad é um **homomorfismo de grupos** cuja imagem é $SO(3)$, o que implica que Ad_q é uma **Rotação no Espaço**.

Demonstração

A demonstração **NÃO** é tarefa fácil:

Demonstração: O fato que é homomorfismo se depreende diretamente do fato que $\mathbb{S}^3$ é subgrupo de $\mathbb{H}^*$.

Primeiramente, mostremos que, $\mathrm{Im}(\mathrm{Ad}) \subseteq SO(3)$. Para isto, sejam $v = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ e $w = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, dois quatérnions puros e $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{S}^3$, isto é, satisfazendo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Neste caso $q^{-1} = \overline{q} = a - bi - cj - dk$. Temos, por um lado

$$\mathrm{Ad}_q(v)\mathrm{Ad}_q(w) = -\langle \mathrm{Ad}_q(v), \mathrm{Ad}_q(w)\rangle + \mathrm{Ad}_q(v) \times \mathrm{Ad}_q(w).$$

O que queremos mostrar é que a parte real de $\mathrm{Ad}_q(v)\mathrm{Ad}_q(w)$ é igual à parte real de vw. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Ad}_q(v)\mathrm{Ad}_q(w) = qwq^{-1}qvq^{-1} = qvwq^{-1} = \\
= \; & (a + bi + cj + dk)\,(-\langle v, w\rangle + v \times w)\,(a - bi - cj - dk) = \\
= \; & ((-a\langle v, w\rangle - b(y_1z_2 - z_1y_2) - c(z_1x_2 - x_1z_2) - d(x_1y_2 - y_1x_2)) + \\
& + (-b\langle v, w\rangle + a(y_1z_2 - z_1y_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2) - d(z_1x_2 - x_1z_2))\, i + \\
& + (-c\langle v, w\rangle + a(z_1x_2 - x_1z_2) + d(y_1z_2 - z_1y_2) - b(x_1y_2 - y_1x_2))\, j + \\
& + (-d\langle v, w\rangle + a(x_1y_2 - y_1x_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) - c(y_1z_2 - z_1y_2))) \cdot \\
& \cdot (a - bi - cj - dk) = \\
= \; & \big(-a^2\langle v, w\rangle - ba(y_1z_2 - z_1y_2) - ca(z_1x_2 - x_1z_2) - da(x_1y_2 - y_1x_2) + \\
& -b^2\langle v, w\rangle + ab(y_1z_2 - z_1y_2) + cb(x_1y_2 - y_1x_2) - db(z_1x_2 - x_1z_2) + \\
& -c^2\langle v, w\rangle + ac(z_1x_2 - x_1z_2) + dc(y_1z_2 - z_1y_2) - bc(x_1y_2 - y_1x_2) + \\
& -d^2\langle v, w\rangle + ad(x_1y_2 - y_1x_2) + bd(z_1x_2 - x_1z_2) - cd(y_1z_2 - z_1y_2)\big) + \\
& +(\ldots)i + (\ldots)j + (\ldots)k = \\
= \; & -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\langle v, w\rangle + \\
& +(\ldots)i + (\ldots)j + (\ldots)k = \\
= \; & -\langle v, w\rangle + (\ldots)i + (\ldots)j + (\ldots)k.
\end{aligned}$$

Com isto, mostramos que $\mathrm{Ad}_q \in O(3)$. Para verificarmos o determinante, temos que escrever a matriz da transformação Ad na base canônica:

$$[\mathrm{Ad}_q] = \begin{pmatrix} \mathrm{Ad}_q(i) & \mathrm{Ad}_q(j) & \mathrm{Ad}_q(k) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_q(i) &= (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) = \\
&= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + (2bc + 2ad)j + (2bd - 2ac)k = \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \\ 2bc + 2ad \\ 2bd - 2ac \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_q(j) &= (a + bi + cj + dk)j(a - bi - cj - dk) = \\
&= (2bc - 2ad)i + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)j + (2ab + 2cd)k = \\
&= \begin{pmatrix} 2bc - 2ad \\ a^2 + c^2 - b^2 - d^2 \\ 2ab + 2cd \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_q(k) &= (a + bi + cj + dk)k(a - bi - cj - dk) = \\
&= (2ac + 2bd)i + (2cd - 2ab)j + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)k = \\
&= \begin{pmatrix} 2ac + 2bd \\ 2cd - 2ab \\ a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deixamos ao encargo do leitor efetuar estlongo e tedioso cálculo do determinante para concluir que é igual a 1, usando o fato que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Portanto $\mathrm{Ad}_q \in SO(3)$ quando $q \in \mathbb{S}^3$.

Então, podemos concluir que Ad_q é uma rotação espacial. Vamos analisar mais de perto para vermos como o eixo de rotação e o ângulo de rotação podem ser determinados a partir das componentes do quatérnion q.

O eixo de rotação da transformação Ad_q é o vetor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}(b, c, d) \in \mathbb{R}^3.$$

De fato, seja o quatérnion $N = bi + cj + dk$, deixamos ao encargo do leitor verificar que $\mathrm{Ad}_q(N) = N$. Logo N é um autovetor com autovalor igual a 1. Como o eixo de rotação tem que ser um vetor unitário, é só dividirmos N por sua norma, obtendo assim

$$n = \frac{N}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk) = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}(bi + cj + dk).$$

O ângulo de rotação é dado por $\psi = 2 \arccos a$. De fato, como o eixo de rotação está na direção (b, c, d), basta tomarmos um vetor v perpendicular ao eixo de rotação e vermos o ângulo ψ, entre $\mathrm{Ad}_q(v)$ e v:

$$\cos\psi = \frac{\langle \mathrm{Ad}_q(v), v\rangle}{\|\mathrm{Ad}_q(v)\|\|v\|} = \frac{\langle \mathrm{Ad}_q(v), v\rangle}{\|v\|^2}.$$

Tomemos, por exemplo $v = ci - bj$, é fácil ver que $v \perp n$. Temos ainda que $\|v\| = b^2 + c^2$. Portanto, a única informação que precisamos é a parte real do produto $\mathrm{Ad}_q(v)v$. Deixamos, mais uma vez, ao encargo do leitor verificar que

$$\mathrm{Ad}_q(v)v = (1 - 2a^2)(b^2 + c^2) + (\ldots)i + (\ldots)j + (\ldots)k.$$

Portanto

$$\langle \mathrm{Ad}_q(v), v\rangle = (2a^2 - 1)(b^2 + c^2),$$

o que resulta em

$$\cos\psi = \frac{(2a^2 - 1)(b^2 + c^2)}{b^2 + c^2} = 2a^2 - 1.$$

Mas

$$\cos\psi = 2\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - 1,$$

assim

$$\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = a,$$

resultando em

$$\psi = 2 \arccos a.$$

Finalmente, temos que provar que a aplicação Ad é sobrejetiva. Para isto, tome $A \in SO(3)$, sabemos do capítulo 1, que existe um eixo de rotação n e um ângulo ψ tal que $A = R_{n,\psi}$. É fácil ver, em vista de todas as considerações feitas anteriormente que

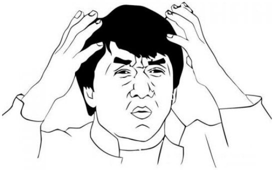
$$A = R_{n,\psi} = \mathrm{Ad}_q,$$

onde

$$q = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) n. \tag{2.1}$$

Isto conclui a demonstração. ■

Isto conclui a demonstração. ■



Rotações no Espaço por $\mathbb{H}$

Agora falta encontrar uma maneira de rotacionar com Ad_q em um eixo $\overrightarrow{n}$, por um ângulo ψ.

Seja $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{S}^3$. Sobre a transformação Ad_q temos:

O eixo $\overrightarrow{n}$ de rotação é:

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(bi + cj + dk)$$

O ângulo ψ de rotação é:

$$\psi = 2cos^{-1}a$$

Então: $q = cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + sen\left(\frac{\psi}{2}\right)\overrightarrow{n}$

Assim, temos todo o arcabouço necessário para realizar uma rotação no espaço através de quatérnions, pois $R_{\overrightarrow{n},\psi} = Ad_q$.

Exemplo

Por exemplo, vamos rotacionar $v = (1, 0, 0)$ por $90°$ no eixo z:

Primeiramente, convertamos o vetor para formato de quatérnion:
$v = 0 + 1i + 0j + 0k = i$

Agora, o eixo $\overrightarrow{n}$ em quatérnion: $\overrightarrow{n} = 0 + 0i + 0j + 1k = k$

E então temos: $q = \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot k\right)\right]$

Finalmente:

$$v' = Ad_q(v) = qv\bar{q} =$$

$$= \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot k\right)\right] i \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot k\right)\right] =$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}i = j$$

Portanto $v' = (0, 1, 0)$.

Obrigado!